

ベータ線の測定実験の確率・統計の教育への応用

宮城真帆¹ 吉永仁美² 石川正勝

Measurements of Beta-Decay and their Applications
to Education of Statistics

Maho Miyagi, Hitomi Yoshinaga and Masakatsu Ishikawa

1996年12月6日受理

概要

We propose a cooperative education program with physics and mathematics in statistics on measurements of β -decay.

1 はじめに

高校の教科の中で、その分野の特性から、数学(数式)を最も多く使うのは数学以外では物理であり、微分や積分などの数学のルーツはニュートンの力学にあるのに、我が国の高校の数学教育と物理教育の連携が十分には行われていないと感ずるのは筆者等だけではないだろう。今日の物理のどの教科書でも概念の上で事実上微分を扱っているが、数学で微分・積分を学んだのに、微分を使わないのはおかしい。もっと積極的に微分を使うべきであるという主張も見られる。(この問題については別の論文[1]で論ずる。)当然のことだが、数学では、さまざまな具体的な現象の数量関係だけを抽象化して論ずる。しかし現実の世界は具体的であるという点を考えるなら、抽象化された数学の世界だけを学ぶのでは数学教育上も不十分であり、具体的な現象との結びつきも可能な限り視野に入れることが必要だろう、という物理学の側からの意見も存在するが、

¹沖縄県島尻郡南風原町字兼城 290-2

²静岡県榛原郡吉田町片岡 2093-1

そのような考えは物理学に身を置く者達の傲慢だろうか。いずれにしても数学教育と物理教育の関係者のあいだの積極的な検討が望まれる。

物理の側からの数学教育との関わり方としては、次の2つの側面があるだろう。

1. 数学で学んだ事柄、例えば微分や積分、を物理で使う。
2. 数学で学んだ、あるいは学びつつある基礎的な概念を、物理教育の流れの中で、物理現象をその具体例として、数学の概念の理解を深め肉付けする側面的な役割を果たしながら、数学教育との橋渡しをする。

前者の場合には、生徒が使う数学を十分こなしており、物理の記号や表現法に混乱なく移行できるようでなければならない。たとえば、落下運動と二次関数。後者としてすぐに思いつくものを挙げるなら、微分と速度・加速度がまず挙げられるだろう。どちらの場合にせよ、数学教育でどのような数学の組立て方をしているかには十分な注意が必要である。

本論文では、以上に述べた考えに基づいて、後者の場合の一例に資すると思われる、放射性崩壊の測定が確率・統計の教育に寄与する側面について論ずる。

確率・統計の教育では、サイコロや硬貨を投げるモデルがよく使われる。それらのモデルは確率・統計の基礎を学ぶためには簡単で都合がよい。それらは物理でいう思考実験のモデルと考えられる。(十分な個数の具体的なデータを得るような実験が実際に行われることは少ないのではないだろうか。)数学教育の枠内で考えると、現実にはそのようなモデルしか取り扱えないのかもしれない。

確率・統計と関係する興味ある物理現象の1例が放射性核の崩壊である。それについては現在の教育課程では物理 Ib で学ぶ。放射性核の崩壊で確率・統計を学ぶのがよい点は

1. 放射性核の崩壊は量子論に基づいており本質的に確率的な現象であること、
2. 核物理の分野を机上の学習だけにとどまらず、日常使われる用語となっている「放射能」、「放射線」に肌身で触れることができ、放射性核の崩壊の確率的法則を実験を通して具体的に検証できること、

であろう。

そこで我々は放射性核の崩壊を確率・統計の学習と結びつける次のプ

ログラムについて考えた。

1. まずベータ線サーベイメータで自然ベータ線と放射性物質の放出するベータ線の不規則なクリック音を聞き、自然ベータ線や放射性物質のベータ線の存在を実感するとともに、その不規則性の統計的性質への問題意識の出発点とする。
2. 次にガイガー・ミュラー (G-M) 管に計数装置をつけ、自然に存在する放射性核が放出するベータ線を観測し、一定時間 (例えば 1 分間) に検出される崩壊数をできるだけ回数多く計測し、どのような統計分布に従っているのかを調べる。
3. 以上は時間的なランダムネスである。ベータ線が原子核から放出される方向もランダムであり、写真フィルムをベータ線源に曝して感光させると、ランダムな感光点が時間とともに増えていくことを見ることができ、放射性核の崩壊が確率現象であることが一層実感的に理解される。

放射性崩壊の測定実験は、大学の初年級の物理学実験で多く行われている主要な実験テーマのひとつである (たとえば文献 [2,3])。しかし実験時間の制約から十分な個数の計測値を得ることはどこでも行われていないと思われる。計測値の個数が少なくて実験結果がどのように崩壊の確率的法則に従っているかを十分に確かめることはできない。また、写真フィルムをベータ線源に曝して感光させる実験についても珍しいものではないだろう。しかしそれらを数学の確率論の教育と結びつけて系統的に論じた論文を筆者等は知らない。そこでそのような意義付けのもとに改めて上記の 2 つの実験を行った。以下にその結果を報告する。

2 自然放射線の計測

自然 (バックグラウンド) 放射線を放出する放射線源には様々な核種があるが、いずれも半減期のきわめて長い核種だけと考えるとよい。従って、一定の測定時間内にベータ崩壊する原子核の個数の確率分布は、放射性崩壊核の個数が時間変動しない限り、時間的に一定となる。核種により崩壊する確率が異なるので、その確率分布は一般的には極めて複雑である。しかし存在比と半減期から 1 つの核種が主要な寄与をするなら数学的には極めて単純になる。そこで単一の核種を仮定して考察を進める。仮定を正当化することができるかどうかは測定結果より検証する。観測にか

かる放射性核の総数を N 個とする。時間 Δt に 1 個の原子核が崩壊する確率を p とすると、 Δt のあいだに N 個の原子核のうちの n 個が崩壊する確率 $P(n)$ は 2 項分布

$$P(n) = {}_N C_n p^n (1-p)^{N-n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N) \quad (2 \text{ 項分布}) \quad (1)$$

で与えられる。 p が 1 に比べて十分に小さく Np が極端に大きくも小さくもないときには、2 項分布 (1) はポアソン分布

$$P(n) = \frac{(Np)^n}{n!} e^{-Np} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{ポアソン分布}) \quad (2)$$

に近づき、 p が 1 に比べて十分に小さく Np が 1 に比べて十分に大きいときには、2 項分布 (1) は正規分布

$$P(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(n - \langle n \rangle)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (\text{正規分布}) \quad (3)$$

に帰着される [2]。ここで $\langle n \rangle = Np$ 、 $\sigma = \sqrt{Np(1-p)}$ である。 p を 1 に比べて十分に小さくしたまま Np を大きくしていくと、ポアソン分布が正規分布に移行することも示される。2 項分布、ポアソン分布、正規分布とも確率・統計で学ぶが、現在のカリキュラムではそれらの相互関係については学ぶことになってはいない。

使用した実験装置を概念的に示すと図 2 のようになるが、大学の多くの初年級の実験教科書に見られるものと本質的に変わる点はないので記述を省略する。

測定時間を $\Delta t = 1$ 分にとり、10,000 回まで測定した結果を表 1 と図 2 に示す。表 1 から平均値 $\langle n \rangle$ と標準偏差 σ を求めると、それぞれ $\langle n \rangle = 25.33$ 、 $\sigma = 5.13$ となる。これらの値を平均値と分散として持つ正規分布も図 2 に示す。1,000 回、5,000 回、10,000 回と実験データ数を増やすにつれて、正規分布に近づくように見える。そこで 10,000 回の測定データを正規分布と比較するために、 $\frac{(n - \langle n \rangle)^2}{2\sigma^2}$ を横軸に、頻度の対数を縦軸にとりプロットすると、図 2 が得られる。

分布の裾では出現頻度が小さいので誤差が大きいと思われるが、明確に分布が上下 2 本の曲線に分かれているので、正規分布のように平均値を中心として完全に対称にはなっていない。従って $\Delta t = 1$ 分としたとき、崩壊数の確率分布は正規分布からは幾分ずれると結論される。測定回数をさらに増やしていくと、この結論はさらに明確になるとと思われる。

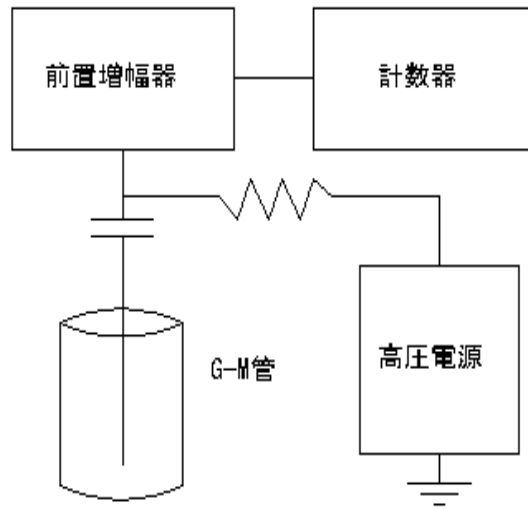


図 1: バックグラウンド放射線の測定装置

表 1: 計測時間を $\Delta t = 1$ 分とし、10,000 回測定した計数値の頻度

計数値 (cpm)	頻度 (回)	計数値	頻度	計数値	頻度
10	3	24	718	38	48
11	11	25	794	39	35
12	11	26	806	40	22
13	35	27	756	41	10
14	55	28	634	42	7
15	89	29	542	43	4
16	146	30	443	44	5
17	230	31	389	45	5
18	272	32	331	46	1
19	368	33	240	47	1
20	518	34	188	48	0
21	585	35	137	49	0
22	659	36	89	50	1
23	756	37	56		

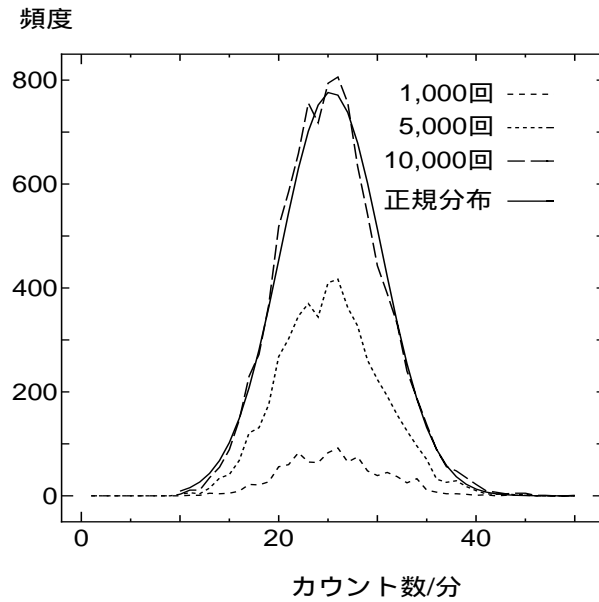


図 2: 計測時間を $\Delta t = 1$ 分として、1,000 回、5,000 回、10,000 回測定した計数値の頻度分布図。グラフには 10,000 回の測定値と同じ平均値と標準偏差を持つ正規分布も示されている。

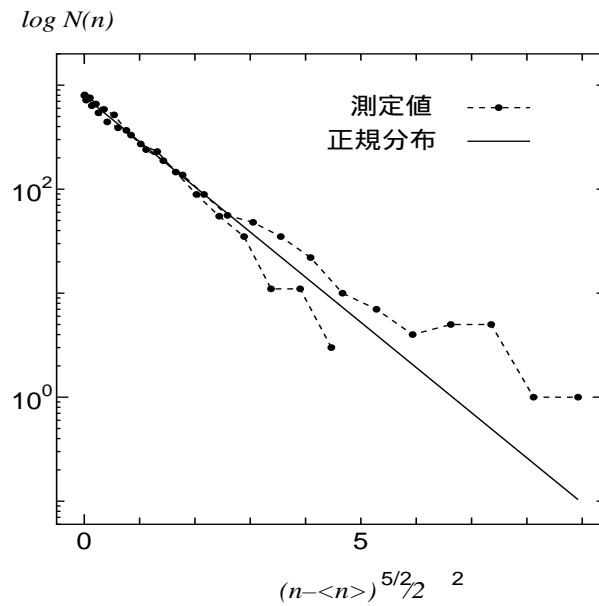


図 3: 縦軸は頻度の対数、横軸は $\frac{(n - \langle n \rangle)^2}{2\sigma^2}$ 。正規分布は直線になる。

そこで、データがむしろポアソン分布に従っているといえるかどうかを調べる。そのために式 (2) を次のように書き換える。

$$\log(N_0 P(n)) + \sum_{r=10}^n \log r = \log N_0 - \lambda - \sum_{r=1}^9 \log r + n \log \lambda$$

($n = 10, 11, 12, \dots$) (4)

ここで $N_0 (= 10,000)$ はデータ数である。データがポアソン分布に従うなら、上式左辺の値は崩壊数 n の 1 次式になるはずである。図 2 にプロットした結果を示す。

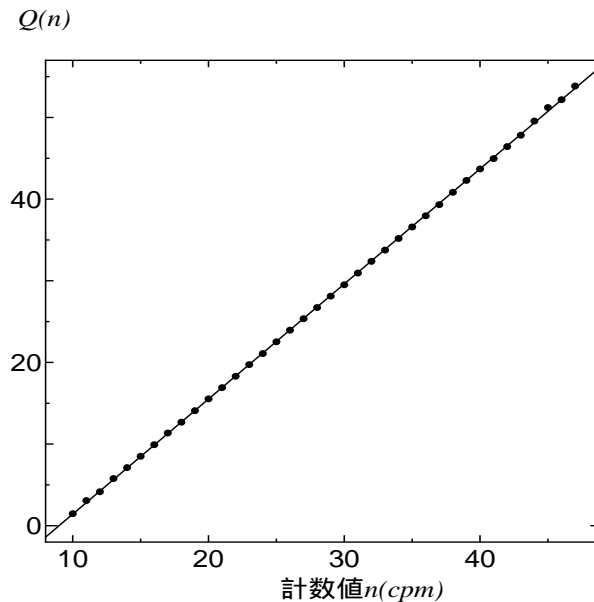


図 4: 縦軸に $Q(n) = \log(N_0 P(n)) + \sum_{r=10}^n \log r$ を、横軸に n をとったグラフ。ポアソン分布は直線になる。

データ点はきれいに直線の上に乗っている。従って、測定時間を $\Delta t = 1$ 分として我々の得たデータは、正規分布に近いポアソン分布に従っていることが分かる。この事実から、自然放射線には 1 つの核種の 1 つのベータ崩壊過程が主要な寄与をしていると結論してよいだろう。

なお、自然放射線は宇宙線などにも起源を持つので、放射線源の数が時間的に変動することが知られている。本実験では 10,000 回の測定を 2 ヶ月ほどかけて行ったので、時間変動も平均されたと思われる。

以上に述べた事から、測定時間 Δt を小さい値から大きくしていくと、ポアソン分布から正規分布に移行する様子を見ることができると思われ

る。それは、 Δt を大きくするにしたいが p が大きくなるので N_p が大きくなるからである。本研究では Δt を変える実験を行わなかったが、興味深い課題である。

3 ベータ線による写真フィルムの感光

ベータ線による写真フィルムや原子核乾板の感光の実験についても、すでに「IPS 物理」[3]に述べられているので、ここで取り上げることで本質的に新しいものはなにもない。しかし、すでに述べた観点から新たに検討してみることは、大いに意味のあることである。

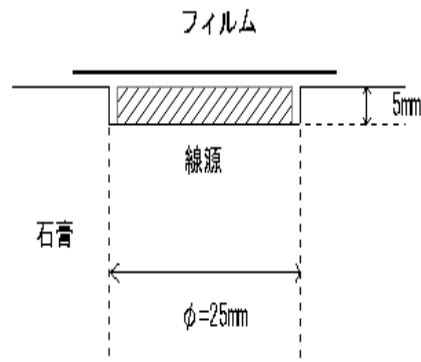


図 5: 石膏の台を使った ^{90}Sr の写真フィルム感光実験。

「IPS 物理」の 7 章には、ポラロイド・フィルムをポロニウムの線源に曝して感光させ、顕微鏡で拡大した写真が、装置の図とともに説明されている。そこではフィルムを支持しベータ線を遮蔽するための台にプラスチックのブロックを用いているが、我々はそれよりはるかに簡単で作りやすい、図 3 に示す石膏の台で試みた。フィルムはモノクロームのシート・フィルム (富士フィルム NEOPAN 100) を、線源には ^{90}Sr を用いた。

実験は線源に曝してから 0、3、5、8、10 分後のフィルムを調べた。図 3 にそれらを顕微鏡で 600 倍に拡大した写真を示す。感光した黒点を 1,000 倍の顕微鏡で観察すると、それらはさらに小さな感光した銀粒子の点の集まりであることが分かる。図 3 より次のことが言える。

1. 黒点がランダムに分布していることから、線源から出たベータ線の方向もランダムであること（一様ランダム性）。つまりベータ線の方向も確率的であること。
2. 黒点の数が時間の経過とともに増加すること。つまり時間についてもランダムであること（一様ランダム性）。

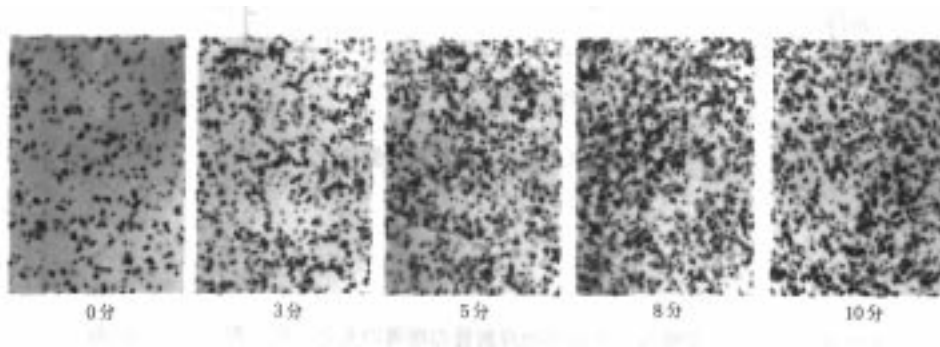


図 6: 線源に曝してから 0、3、5、8、10 分後のフィルムを 600 倍に拡大した写真。

表 2: 黒点数密度と時間の関係

時間(分)	0.0	3.0	5.0	8.0	10.0
平均黒点数	217.8	384.8	426.6	603.2	641.8
標準偏差	23.7	47.9	27.5	34.0	22.6

黒点の数は線源の放射性核 (^{90}Sr) の崩壊数に比例すると考えてよいだろう。そこで、黒点の密度が時間とともにどのように増加をするかを調べた。写真を拡大し、その上に 1mm 方眼のグラフ用のトレーシング・ペーパーを重ねて、写真の黒点の位置を数えた。5 箇所 of 等しい面積を重ねらないように選んで数えたところ、表 2 のデータが得られた。それをグラフにすると図 3 になる。黒点の密度が時間に比例していることがはっきりと分かる。つまり、ベータ線が時間と方向についてランダムに放射されていることが確かめられる。

なお、照射時間が 0 分、つまり線源に曝してないフィルムにも多くの黒点が存在する。これは製造時にすでに存在していたと思われるが、原因が不明である。(フィルムを通常の写真に使う限り問題はない。)

4 考察

以上に述べた2つの実験は、生徒が物理教員の指導のもとに行う際にとりわけ難しい点はなにもない。ただ、自然放射線の測定では、統計性を明瞭に見るには、本研究で行ったように、多くのデータが必要となり、そのためには時間がかかることである。それも、学期にはじめのころの授業で実験の仕方を教え、生徒に交代でデータを取るよう指導すれば、データ数が増えるに従い次第に統計性が見えてくるので、一層生徒の関心を引くことができるだろう。その際に、たとえば計測時間を $\Delta t = 20$ 秒と短く取り、 $\Delta t = 40$ 秒のデータは $\Delta t = 20$ 秒の隣り合う2つのデータの和から求めるなどすれば、計測時間 Δt を大きく取るに従い次第にポアソン分布から正規分布に移行するようすが、一組のデータから得られる。なおこの G-M 管を使う実験で、自然放射線を測定するかわりにベータ線源を使うことも可能かもしれない。ただし、実験が長期にわたるので、線源の管理と生徒を必要以上の放射線に曝さないという点で考えておかなければならない。また線源が強すぎるとよほど計測時間を短く取らないとポアソン分布が得られないことにも注意しなければならない。

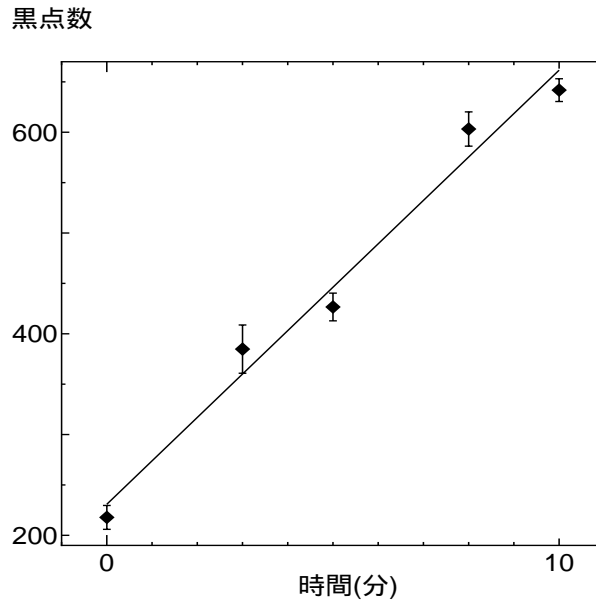


図 7: 平均黒点数密度の時間変化。

実験結果を示さないが、ベータ線源ではなく、アルファ線源を使うフィ

ルムの感光実験も可能である。ベータ線によるフィルムの感光の実験はフィルムと感光の仕組みを理解する教育にもなるだろう。

本研究は宮城と吉永が石川の指導のもとに行った卒業研究の一部をまとめたものである。

最後に、元静岡大学理学部講師の山下繁男氏には、さまざまな議論をしていただいただけでなく、一部の実験機材を貸していただいた。ここでお礼を申し上げます。

参考文献

- [1] 石川正勝：「高校の物理における数学と実験」常葉学園大学紀要(外国語学部) 第13号(1997)
- [2] 東京大学教養部物理学教室編：「十訂新版物理実験」学術図書出版社
- [3] 静岡大学教養部物理教室：「物理実験指導書」
- [4] 竹内啓、藤野和建：「2項分布とポアソン分布」東京大学出版会
- [5] 山内恭彦、高見穎郎、兵藤申一訳：「IPS 物理」岩波書店