無記憶ガウス型情報源の有歪信頼性関数
Reliability Functions with Distortion of Memoryless Gaussian Sources

井 原 俊 輔* 　久 保 仁**
Shunsuke IHARA 　Masashi KUBO

Abstract— We are interesting in the error exponent for source coding with fidelity criterion. For each fixed distortion level D, the maximum attainable error exponent at rate R, as a function of R, is called the reliable function. The minimum rate achieving the given error exponent is called the minimum achievable rate. For memoryless sources with finite alphabet, Marton (1974) gave an explicit form of the reliable function. The aim of the paper is to derive formulas for the reliable function and the minimum achievable rate for memoryless Gaussian sources.

Keywords— minimum achievable rate, error exponent, reliability function, memoryless Gaussian source, large deviation property

1　はじめに

歪みを許す場合の情報源符号化における許容される歪みを越える確率（これを誤り確率という）を考える．よく知られているように，レートが情報源のレート・歪み関数より大きい適当な符号化により誤り確率を 0 に近づけることができる．有限アルファベット無記憶情報源に対してはこの誤り確率は符号長を長くすると指数関数的に 0 に近づき，その error exponent が求められている [1, 2]．この error exponent を信頼性関数という．信頼性関数の逆関数を韓 [3] にならい，minimum achievable rate という．本報告の目的は，歪みを 2 乗平均誤差で測るときの無記憶ガウス型情報源の minimum achievable rate および信頼性関数を決定することである．

一般の場合の minimum achievable rate および信頼性関数の定義を 2 節で述べる．無記憶ガウス型情報源の場合の我々の結果を 3 節で与える．証明のために必要な補題を 4 節で述べ，定理の証明を 5 節で与える．

2　信頼性関数

情報源を確率過程 $X = \{X_n\}$ で表す．情報源アルファベット空間を $\mathcal{X}$，復号アルファベット空間を $\mathcal{Y}$ とする．このとき，各 X_n は $\mathcal{X}$ の値をとる．関数 $\rho : (\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \longrightarrow [0, \infty)$ を歪み測度とし，

$$\rho_n(x_1^n, y_1^y) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \rho(x_k, y_k)$$

と定義する．ここで $x_1^n \equiv (x_1, ..., x_n) \in \mathcal{X}^n$．符号化 (encoder) φ_n および復号化 (decoder) ψ_n は写像

$$\varphi_n : \mathcal{X}^n \longrightarrow \mathcal{M}_n, \qquad \psi_n : \mathcal{M}_n \longrightarrow \mathcal{Y}^n,$$

で与えられる．ただし，$\mathcal{M}_n = \{1, 2, ..., M_n\}$ で M_n はある自然数．符号化と復号化の組の列 $\{(\varphi_n, \psi_n)\}_{n=1,2,...}$ を単に code と呼ぶことにする．

$\psi_n \circ \varphi_n$ と φ_n を同一視し，$\mathcal{Y} = \mathcal{X}$ としても一般性は失われないので，以後簡単のために

$$\varphi_n : \mathcal{X}^n \longrightarrow \mathcal{X}^n$$

とし，$\varphi \equiv \{\varphi_n\}_{n=1,2,...}$ を code と呼ぶ．

歪み $D > 0$ を許す場合の誤り確率を

$$e_n(\varphi_n, D) = P(\rho_n(X_1^n, \varphi_n(X_1^n)) > D)$$

と記す．

$$\mathrm{rate}\,(\varphi) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log |\varphi_n|$$

を code $\varphi = \{\varphi_n\}$ のレートという．ただし $|\varphi_n|$ は集合 $\varphi_n(\mathcal{X}^n)$ の要素の個数を表す．

定義 1　正数 D, r, R に対し，code $\varphi = \{\varphi_n\}$ が

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log e_n(\varphi_n, D) \le -r$$

を満たすとき，φ は (D, r)-achievable といい，(D, r)-achievable な code の全体を $\mathcal{C}(D, r)$ と記す．

$$R(D, r) = \inf\{\,\mathrm{rate}\,(\varphi); \varphi \in \mathcal{C}(D, r)\}$$

を minimum (D, r)-achievable rate という．

$$r(D, R) = -\inf_{\varphi\,:\,\mathrm{rate}\,(\varphi)\le R}\ \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log e_n(\varphi_n, D)$$

を信頼性関数という．

*　名古屋大学情報文化学部，〒464-8601 名古屋市千種区不老町，
Tel: (052)789-4843, E-mail: ihara@math.nagoya-u.ac.jp
**　常葉学園大学教育学部，〒420-0911 静岡市瀬名 1-22-1，
Tel: (054)261-2661, E-mail: kubo@tokoha-u.ac.jp

注意 1 Minimum achievable rate は無歪みの場合の韓 [3] の定義にならったものであり，信頼性関数は Marton [1]（[2] も参照）による．

続いて，正しく復号される確率についての minimum achievable rate と信頼性関数を定義する．

定義 2 正数 D, r, R に対し，code $\varphi = \{\varphi_n\}$ が

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(1 - e_n(\varphi_n, D)) \geq -r$$

を満たすとき，φ は正しく復号する確率について (D, r)-achievable といい，正しく復号する確率について (D, r)-achievable な code の全体を $\mathcal{C}^*(D, r)$ と記す．

$$R^*(D, r) = \inf\{\,\mathrm{rate}\,(\varphi); \varphi \in \mathcal{C}^*(D, r)\}$$

を（正しく復号する確率についての）minimum (D, r)-achievable rate という．

$$r^*(D, R) = -\sup_{\varphi\,:\,\mathrm{rate}\,(\varphi)\leq R} \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(1 - e_n(\varphi_n, D))$$

を（正しく復号する場合の）信頼性関数という．

信頼性関数に関しては有限アルファベット情報源の場合には次の結果が知られている．

定理 1 ([1, 2]) 有限アルファベット無記憶情報源の場合には各 X_n の分布を μ とすると，任意の D に対し，

$$r(D, R) = \inf_{\nu}\{D(\nu\|\mu); R(D; \nu) > R\}, \quad R > 0, \quad (1)$$

である．ここで，$D(\nu\|\mu)$ はダイバージェンスを表し，$R(D; \mu)$ は分布 μ のレート・歪み関数である．

注意 2 正確な検証はまだしていないが，上の場合の minimum achievable rate は

$$R(D, r) = \sup_{\nu}\{R(D; \nu); D(\nu\|\mu) < r\}, \quad r > 0, \quad (2)$$

であろう．

有限アルファベットのマルコフ連鎖の場合には Davisson 等の仕事がある．本報告で無記憶ガウス型情報源の場合にも (1) および (2) が成り立つことを証明する．もっと多くの情報源に対して (1) および (2) が成り立つことが予想される．

3 無記憶ガウス型情報源の信頼性関数

情報源 $X = \{X_n\}$ は分布 $N(0, \sigma)$ の i.i.d. とする．このとき無記憶ガウス型情報源という．以後 $\mathcal{X} = \boldsymbol{R}$ とし，歪み関数は

$$\rho(x, y) = |x - y|^2, \quad x, y \in \boldsymbol{R},$$

とする．簡単のため

$$\|x_1^n\|_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2, \quad x_1^n \equiv (x_1, ..., x_n) \in \boldsymbol{R}^n,$$

と記す．次の結果が証明できる．

定理 2 無記憶ガウス型情報源に対し，$0 < D < \sigma$ のとき

$$R(D, r) = \frac{1}{2} \log \frac{\alpha^2}{D^2}, \quad r > 0, \quad (3)$$

$$r(D, R) = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2}{\sigma^2} - 1 - \log \frac{\alpha^2}{\sigma^2}\right), \quad R > R(D; \mu), \quad (4)$$

である．ただし，$\alpha > \sigma$ は (3) では

$$r = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2}{\sigma^2} - 1 - \log \frac{\alpha^2}{\sigma^2}\right) \quad (5)$$

により，(4) では $R = \log(\alpha/D)$ により一意に定まる．式 (3) と (4) は各々 (2) と (1) とに同値である．

正しく復号される確率については次の定理が成り立つ．

定理 3 無記憶ガウス型情報源に対し，$0 < D < \sigma$ のとき

$$R^*(D, r) = \frac{1}{2} \log \max\left(\frac{\beta^2}{D^2}, 1\right), \quad r > 0, \quad (6)$$

である．ただし，$0 < \beta < \sigma$ は (5) で α を β に代えた式で定める．

4 補題

本節では定理の証明に必要なガウス定常過程に関する補題を用意する．二つの正則なガウス定常過程 $X = \{X_n\}, Y = \{Y_n\}$ を考える．平均は 0 とし，各々のスペクトル密度関数（SDF）を $f(\lambda), g(\lambda)$ とする：

$$\gamma_n = E[Y_{n+k}Y_k] = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} g(\lambda) d\lambda.$$

Y_1^n の共分散行列を $\Gamma_n = [\gamma_{i-j}]_{i,j=1,\ldots,n}$ とする．Y_1^n の確率密度関数は

$$q_n(y_1^n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Gamma_n|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\langle \Gamma_n^{-1} y_1^n, y_1^n\rangle\right\}$$

である（$\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $\boldsymbol{R}^n$ の内積）．単位時間当たりのエントロピーおよび相対エントロピーは

$$\overline{h}(X) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log\{4\pi^2 e f(\lambda)\} d\lambda,$$

$$\overline{D}(X\|Y) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left\{\frac{f(\lambda)}{g(\lambda)} - 1 - \log \frac{f(\lambda)}{g(\lambda)}\right\} d\lambda,$$

で与えられる．$n \to \infty$ のときの

$$Z_n = \frac{1}{n} \log q_n(X_1^n)$$

の挙動を調べる．$n \to \infty$ のとき Z_n は

$$-\overline{h}(X) - \overline{D}(X\|Y)$$
$$= -\log(2\pi) - \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log g(\lambda) d\lambda - \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\lambda)}{g(\lambda)} d\lambda$$

に収束する．

$$W_n = \frac{1}{n}\langle \Gamma_n^{-1} X_1^n, X_1^n\rangle = -2Z_n - \log(2\pi) - \frac{1}{n}\log|\Gamma_n|$$

とおく．確率

$$P(Z_n \le -\overline{h}(X) - \overline{D}(X\|Y) - c)$$

と確率

$$P\left(W_n \ge \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(\lambda)}{g(\lambda)}d\lambda + 2c\right)$$

の漸近挙動は同じであり，さらにこれは

$$P\left(\frac{1}{2\pi n}\langle T_n(g^{-1})X_1^n, X_1^n\rangle \ge \int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(\lambda)}{g(\lambda)}d\lambda + 4\pi c\right)$$

の漸近挙動とは同じである．つまりガウス過程の２次形式の漸近挙動を調べればよい．SDF $f_\theta(\lambda)$ を次で定める．

$$\frac{1}{f_\theta(\lambda)} = \frac{1}{f(\lambda)} - \frac{4\pi\theta}{g(\lambda)} = \frac{g(\lambda) - 4\pi\theta f(\lambda)}{f(\lambda)g(\lambda)}. \qquad (7)$$

大偏差定理を使い次の基本補題が証明できる．

補題 1　([4] 参照) $c > 0$ に対し

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log P(Z_n \le -\overline{h}(X) - \overline{D}(X\|Y) - c) = -\overline{D}(f^*\|f) \qquad (8)$$

が成り立つ．ここで $f^*(\lambda) = f_{\theta^*}(\lambda)$ で，$\theta^* > 0$ は次式で一意に決まる．

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(\lambda)}{g(\lambda) - 4\pi\theta^* f(\lambda)}d\lambda = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(\lambda)}{g(\lambda)}d\lambda + 4\pi c. \qquad (9)$$

補題１を適用し次を得る．

補題 2　$X = \{X_n\}$ は $N(0,\sigma^2)$ に従う無記憶ガウス型情報源とする．$\alpha > \sigma$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log P(\|X_1^n\|_n > \alpha) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2}{\sigma^2} - 1 - \log\frac{\alpha^2}{\sigma^2}\right). \qquad (10)$$

$0 < \beta < \sigma$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log P(\|X_1^n\|_n < \beta) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\beta^2}{\sigma^2} - 1 - \log\frac{\beta^2}{\sigma^2}\right). \qquad (11)$$

以下，特別な場合として，$Y = \{Y_n\}$ が分布 $N(0,\tau^2)$ の i.i.d. の場合を考える．String matching の確率

$$P(\|Y_1^n - x_1^n\|_n \le D)$$

の漸近評価を行う．定数 $c > 0$ に対し

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x-c|^2 p(x)dx = D^2$$

を満たす確率密度関数 $p(x)$ の全体を $\mathcal{P}_c$ とし，

$$D(\mathcal{P}_c\|q) = \inf\{D(p\|q); p \in \mathcal{P}_c\}$$

と記す．ここで $q(x)$ は $N(0,\tau^2)$ の確率密度関数．

補題 3　$Y = \{Y_n\}$ が分布 $N(0,\tau^2)$ の i.i.d. のとき，$\alpha^2 \le \tau^2 + D^2$ $(\alpha > 0)$ ならば，$\|x_1^n\|_n \le \alpha$ を満たす任意の $x_1^n \in \boldsymbol{R}^n$ に対し

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log P(\|Y_1^n - x_1^n\| \le D)\\ &\ge \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log P\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|Y_k - \alpha|^2 \le D^2\right)\\ &\ge -\log\frac{\alpha}{D}\end{aligned} \qquad (12)$$

が成り立つ．$\alpha^2 = \tau^2 + D^2$ のとき，上式は等号．

5　定理の証明

定理２の証明　(Converse Part)：空間 $\boldsymbol{R}^n$ において，X_1^n の確率密度 $p_n(x_1^n)$ の大きい部分を

$$Q_n(\alpha) = \{x_1^n \in \boldsymbol{R}^n; \|x_1^n\|_n \le \alpha\}$$

とおく．誤り確率を小さくするためには，$Q_n(\alpha)$ の元は歪み D 以内で符号化するのがよい．$Q_n(\alpha)^c$ の元は歪みが D を越えても止むを得ない．誤り確率の指数レートを r とし，α を (5) で定める．歪み D 以内で符号化するためには，半径 $\sqrt{n}D$ の小球で $Q_n(\alpha)$ を覆うことが必要である．$Q_n(\alpha)$ は半径 $\sqrt{n}\alpha$ の球でその体積は

$$V_n(\sqrt{n}\alpha) = \frac{(\sqrt{\pi}\sqrt{n}\alpha)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

である．また，半径 $\sqrt{n}D$ の小球の体積は

$$V_n(\sqrt{n}D) = \frac{(\sqrt{\pi}\sqrt{n}D)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

である．したがって，$Q_n(\alpha)$ を $\sqrt{n}D$ の小球で覆うためには最低限

$$\frac{V_n(\sqrt{n}\alpha)}{V_n(\sqrt{n}D)} = \left(\frac{\alpha}{D}\right)^n$$

個の小球が必要である．即ち，レート

$$\frac{1}{n}\log\frac{V_n(\sqrt{n}\alpha)}{V_n(\sqrt{n}D)} = \frac{1}{2}\log\frac{\alpha^2}{D^2}$$

が必要である．これより次の不等式を得る．

$$R(D,r) \ge \frac{1}{2}\log\frac{\alpha^2}{D^2} \qquad (13)$$

(Direct Part)：(5) の α に対し

$$R > \frac{1}{2}\log\frac{\alpha^2}{D^2}$$

なる R を考える．ランダム符号化により，レートが R 以下の code を構成する．

$$\tau^2 = \alpha^2 - D^2$$

とし，$Y=\{Y_n\}$ を分布 $N(0,\tau^2)$ の i.i.d. とする．

$$\|x_1^n\|_n \le \alpha \tag{14}$$

のとき，補題３より (12) が成り立つ．よって，$\log(\alpha/D) < R_0 < R$ とすると，ある n_0 があって，(14) を満たす任意の $x_1^n \in \boldsymbol{R}^n$ に対し

$$P\left(\|Y_1^n - x_1^n\| \le D\right) > e^{-nR_0}, \quad n \ge n_0,$$

である．$Y^{(m)}=\{Y_n^{(m)}\}$, $m=1,2,...,$ を $Y=\{Y_n\}$ の independent copies とする．String matching の waiting time

$$W_n(Y,x,D)=\inf\{m; \|(Y^{(m)})_1^n - x_1^n\|_n \le D\}$$

に対し，$x=\{x_n\}$ が (14) を満たすとき

$$\begin{aligned} & P\left(W_n(Y,x,D) > e^{nR}\right) \\ & = \prod_{m=1}^{e^{nR}} P(\|(Y^{(m)})_1^n - x_1^n\|_n > D) \\ & \le (1-e^{-nR_0})^{e^{nR}} \\ & < e^{-e^{n(R-R_0)}}, \quad n \ge n_0, \end{aligned}$$

が成り立つ．よって $n \ge n_0$ のとき

$$P(\|X_1^n\|_n \le \alpha, W_n(Y,X,D) > e^{nR}) < e^{-e^{n(R-R_0)}}$$

である．したがって

$$P(W_n(Y,X,D) > e^{nR}) < P(\|X_1^n\|_n > \alpha) + e^{-e^{n(R-R_0)}}$$

が成り立つ．X と Y は独立だから，上のことより，$Y^{(m)}$ $(m=1,2,...)$ の実現値 $y^{(m)}=\{y_n^{(m)}\}$ があって

$$\begin{aligned} & P(W_n(y,X,D) > e^{nR}) \\ & < P(\|X_1^n\|_n > \alpha) + e^{-e^{n(R-R_0)}} \end{aligned} \tag{15}$$

が成立する．この $y^{(m)}$, $m=1,2,...,$ を使って code $\varphi=\{\varphi_n\}$ を次のように定める．もし $\|x_1^n - (y^{(i)})_1^n\|_n > D$, $i=1,...,m-1$, かつ $\|x_1^n-(y^{(m)})_1^n\|_n \le D$ のとき $\varphi_n(x_1^n)=(y^{(m)})_1^n$ $(m=1,2,...,e^{nR})$，その他のとき $\varphi_n(x_1^n)=(y^{(1)})_1^n$．明らかに

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log|\varphi_n| = R \tag{16}$$

である．また，明らかに

$$P(\|X_1^n - \varphi_n(X_1^n)\|_n > D) = P(W_n(y,X,D) > e^{nR})$$

だから，(5), (10), (15) より

$$\begin{aligned} & \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log P(\|X_1^n - \varphi_n(X_1^n)\|_n > D) \\ & \le \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log P(\|X_1^n\|_n > \alpha) \\ & = -r \end{aligned}$$

である．よって φ は (D,r)-achievable である．故に (16) より

$$R(D,r) \le R$$

である．したがって

$$R(D,r) \le \frac{1}{2}\log\frac{\alpha^2}{D^2} \tag{17}$$

が示された．(13) と (17) より (3) を得る．

((3) と (2) の同等性)：　μ を $N(0,\sigma^2)$ のガウス分布，ν^* を $N(0,\alpha^2)$ のガウス分布とする．

$$D(\nu^*\|\mu) = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2}{\sigma^2} - 1 - \log\frac{\alpha^2}{\sigma^2}\right)$$

だから，(5) は $D(\nu^*\|\mu)=r$ を意味する．また

$$R(D;\nu^*) = \frac{1}{2}\log\frac{\alpha^2}{D^2}$$

である．さて，ν を $D(\nu\|\mu) < r$ を満たす任意の分布とする．平均値と分散が同じならばガウス分布の場合の方がダイバージェンス $D(\nu\|\mu)$ は小さく，レート・歪み関数 $R(D;\nu)$ は大きい．したがって (2) の右辺の上限はガウス分布により達成される．そこで ν はガウス分布とする．μ の平均値が 0 だから，ν の平均値も 0 としてよい．ν の分散を λ^2 $(\lambda > 0)$ とすると，$R(D;\nu)$ は λ について単調増加で，$D(\nu\|\mu)$ も $\lambda \ge \sigma$ について単調増加である．したがって $D(\nu\|\mu) < r$ のとき $\lambda < \alpha$ であり，$R(D;\nu) < R(D;\nu^*)$ である．しかし $\lambda \nearrow \alpha$ とすれば $D(\nu\|\mu) < r$ かつ

$$\lim_{\lambda\nearrow\alpha} R(D;\nu) = R(D;\nu^*) = \frac{1}{2}\log\frac{\alpha^2}{D^2}$$

である．よって (2) が成り立つ．　□

定理３の証明　定理３は定理２とほぼ同じ議論によりにより証明できる．

参考文献

[1] K. Marton, Error exponent for source coding with a fidelity criterion, IEEE Trans. Inform. Theory, IT-20 (1974), 197–199.

[2] I. Csiszár and J. Körner, *Information Theory: Coding Theorems for Discrete Memoryless Systems*, Academic Press, New York, 1981.

[3] 韓太舜, 情報理論における情報スペクトル的方法, 倍風館, 東京, 1998.

[4] S. Ihara and M. Kubo, The asymptotics of string matching probabilities for Gaussian random sequences, Preprint Series in Math. Sci., Vol. 1998-6, Nagoya Univ., 1998.