

問 1. $n+1$ 個の点 $v_0, v_1, \dots, v_n$ が一般の位置にあるとする.

i) それらの並べ換え $v_{\tau(0)}, v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(n)}$ (τ は $n+1$ 次の置換) も一般の位置にあることを示せ.

ii) それらから $k+1$ 個の点を取ってきたもの $v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_k}$ ($0 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_k \leq n$) も一般の位置にあることを示せ.

解答. まず, $n+1$ 個の点 $v_0, v_1, \dots, v_n$ が一般の位置にあるとは n 個のベクトル $\overrightarrow{v_0v_1}, \dots, \overrightarrow{v_0v_n}$ が一次独立のこととであったから, 一般の位置にあるということは, 始点 v_0 のみに依り, 点の順番に依らない.

i) 「 $v_0, v_1, \dots, v_n$ が一般の位置にあるとき $v_n, v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$ が一般の位置にある」ことを示せばよい.

$$a_0 \overrightarrow{v_nv_0} + a_1 \overrightarrow{v_nv_1} + \dots + a_{n-1} \overrightarrow{v_nv_{n-1}} = 0, \quad (a_i \in \mathbb{R}) \quad (*)$$

とする. 今

$$\overrightarrow{v_nv_j} = \overrightarrow{v_0v_j} - \overrightarrow{v_0v_n}$$

であるので, (*) は

$$\begin{aligned} -a_0 \overrightarrow{v_0v_n} + a_1 (\overrightarrow{v_0v_1} - \overrightarrow{v_0v_n}) + \dots + a_{n-1} (\overrightarrow{v_0v_{n-1}} - \overrightarrow{v_0v_n}) &= 0, \\ a_1 \overrightarrow{v_0v_1} + \dots + a_{n-1} \overrightarrow{v_0v_{n-1}} - (a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1}) \overrightarrow{v_0v_n} &= 0 \end{aligned}$$

となる. 今, 仮定より $\overrightarrow{v_0v_1}, \dots, \overrightarrow{v_0v_{n-1}}, \overrightarrow{v_0v_n}$ は一次独立であるので,

$$a_1 = \dots = a_{n-1} = -(a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1}) = 0.$$

これより $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$ を得る. 従って $\overrightarrow{v_nv_0}, \overrightarrow{v_nv_1}, \dots, \overrightarrow{v_nv_{n-1}}$ は一次独立, すなわち $v_n, v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$ は一般の位置にある.

ii) 必要ならば, 順序の入れ換えと始点の入れ換えをすることにより, 「 $v_0, v_1, \dots, v_n$ が一般の位置にあるとき, $v_0, v_1, \dots, v_k$ ($k \leq n$) も一般の位置にある」ことを示せばよい. しかし 「 $\overrightarrow{v_0v_1}, \dots, \overrightarrow{v_0v_n}$ が一次独立であるとき, $\overrightarrow{v_0v_1}, \dots, \overrightarrow{v_0v_k}$ も一次独立である」ことは明らか. 従って示された. $\square$

問 2. 円周 S^1 の三角形分割を右図のように与えて, S^1 の整係数ホモロジー群を計算せよ.

解答. この三角形分割において

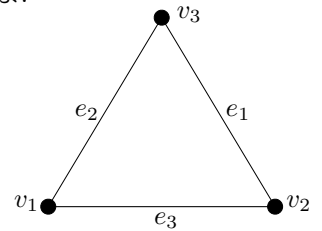
0-単体: v_1, v_2, v_3 ,

1-単体: $e_1 = \langle v_2, v_3 \rangle, e_2 = \langle v_3, v_1 \rangle, e_3 = \langle v_1, v_2 \rangle$

であるので, 鎖群は

$$C_1(S^1; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2 \oplus \mathbb{Z}e_3$$

$$C_0(S^1; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}v_1 \oplus \mathbb{Z}v_2 \oplus \mathbb{Z}v_3$$



で与えられる. 複体

$$0 \xrightarrow{\partial_2} C_1(S^1; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_1} C_0(S^1; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

において境界作用素は

$$\partial_1 e_1 = \partial_1 \langle v_2, v_3 \rangle = v_3 - v_2,$$

$$\partial_1 e_2 = \partial_1 \langle v_3, v_1 \rangle = v_1 - v_3,$$

$$\partial_1 e_3 = \partial_1 \langle v_1, v_2 \rangle = v_2 - v_1,$$

となる. $a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 \in \text{Ker } \partial_1$ ($a_i \in \mathbb{Z}$) とする. このとき

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_1 (a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3) \\ &= a_1 \partial_1 e_1 + a_2 \partial_1 e_2 + a_3 \partial_1 e_3 \\ &= a_1 (v_3 - v_2) + a_2 (v_1 - v_3) + a_3 (v_2 - v_1) \\ &= (a_2 - a_3) v_1 + (a_3 - a_1) v_2 + (a_1 - a_2) v_3 \end{aligned}$$

従って

$$a_2 - a_3 = a_3 - a_1 = a_1 - a_2 = 0$$

すなわち $a_1 = a_2 = a_3$ である. よって $\text{Ker } \partial_1 \subset \mathbb{Z}(e_1 + e_2 + e_3)$. 逆に

$$\partial_1(e_1 + e_2 + e_3) = (v_3 - v_2) + (v_1 - v_3) + (v_2 - v_1) = 0$$

より, $\mathbb{Z}(e_1 + e_2 + e_3) \subset \text{Ker } \partial_1$. 従って

$$\text{Ker } \partial_1 = \mathbb{Z}(e_1 + e_2 + e_3).$$

また

$$\text{Im } \partial_1 = \langle v_3 - v_2, v_1 - v_3, v_2 - v_1 \rangle_{\mathbb{Z}},$$

$$\text{Im } \partial_2 = 0,$$

$$\text{Ker } \partial_0 = C_1(S^1; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}v_1 \oplus \mathbb{Z}v_2 \oplus \mathbb{Z}v_3$$

は明らか. 従ってホモロジー群は,

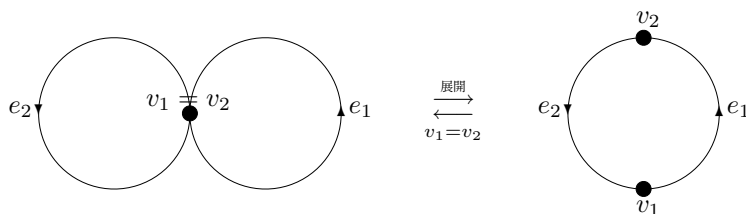
$$H_1(S^1; \mathbb{Z}) := \text{Ker } \partial_1 / \text{Im } \partial_2 = \mathbb{Z}(e_1 + e_2 + e_3) / 0 \simeq \mathbb{Z}(e_1 + e_2 + e_3) \simeq \mathbb{Z},$$

$$H_0(S^1; \mathbb{Z}) := \text{Ker } \partial_0 / \text{Im } \partial_1 = (\mathbb{Z}v_1 \oplus \mathbb{Z}v_2 \oplus \mathbb{Z}v_3) / \langle v_3 - v_2, v_1 - v_3, v_2 - v_1 \rangle_{\mathbb{Z}} \simeq^{*1} \mathbb{Z}.$$

最後の同型 (*1) は $H_0(S^2; \mathbb{Z})$ の計算のときと全く同様に示せる. □

問 3. 8 の字形の整係数ホモロジー群を求めよ.

解答.



右側の円周を反時計回りに回る 1-単体を e_1 , 左側の円周を反時計回りに回る 1-単体を e_2 , ふたつの円周の交わりを $v = v_1 = v_2$ とする. 八の字形 $e_1 \cup e_2 \cup v$ を 8 で表す. このとき

$$C_1(8; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2, \quad C_0(8; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}v.$$

$$0 \xrightarrow{\partial_2} C_1(8; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_1} C_0(8; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

$$\partial_1 e_1 = \partial_1 \langle v_1, v_2 \rangle = v_2 - v_1 = v - v = 0,$$

$$\partial_1 e_2 = \partial_1 \langle v_2, v_1 \rangle = v_1 - v_2 = v - v = 0.$$

であるので,

$$\text{Ker } \partial_1 = C_1(8; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2, \quad \text{Im } \partial_1 = 0, \quad \text{Im } \partial_2 = 0, \quad \text{Ker } \partial_0 = C_0(8; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}v.$$

よって,

$$H_1(8; \mathbb{Z}) = \text{Ker } \partial_1 / \text{Im } \partial_2 = (\mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2) / 0 = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2 \simeq \mathbb{Z}^{\oplus 2},$$

$$H_0(8; \mathbb{Z}) = \text{Ker } \partial_0 / \text{Im } \partial_2 = (\mathbb{Z}v) / 0 = \mathbb{Z}v \simeq \mathbb{Z}.$$

□