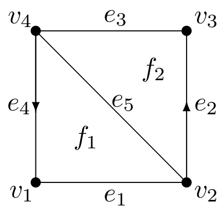
問 1. Möbius の帯の整係数ホモロジー群を求めよ.

解答. Möbius の帯 MB に次のような三角形分割を与える.



0-単体 $v_1 = v_3,\ v_2 = v_4.$

1-単体 $e_1 = \langle v_1, v_2\rangle,\ e_2 = \langle v_2, v_3\rangle = \langle v_4, v_1\rangle = e_4,$
$e_3 = \langle v_3, v_4\rangle,\ e_5 = \langle v_2, v_4\rangle.$

2-単体 $f_1 = \langle v_1, v_2, v_4\rangle,\ f_2 = \langle v_2, v_3, v_4\rangle.$

したがって鎖群は

$$\begin{aligned} C_2(MB, \mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}f_1 \oplus \mathbb{Z}f_2 \\ C_1(MB, \mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2 \oplus \mathbb{Z}e_3 \oplus \mathbb{Z}e_5 \\ C_0(MB, \mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}v_1 \oplus \mathbb{Z}v_2 \end{aligned}$$

となる. 境界作用素は

$$\begin{aligned} \partial_2 f_1 &= \langle v_2, v_4\rangle - \langle v_1, v_4\rangle + \langle v_1, v_2\rangle = e_5 - (-e_2) + e_1 = e_1 + e_2 + e_5, \\ \partial_2 f_2 &= \langle v_3, v_4\rangle - \langle v_2, v_4\rangle + \langle v_2, v_3\rangle = e_3 - e_5 + e_2 = e_2 + e_3 - e_5, \\ \partial_1 e_1 &= v_2 - v_1, \\ \partial_1 e_2 &= v_3 - v_2 = v_1 - v_2, \\ \partial_1 e_3 &= v_4 - v_3 = v_2 - v_1, \\ \partial_1 e_5 &= v_4 - v_2 = 0. \end{aligned}$$

で与えられる.

$H_2(MB;\mathbb{Z})$ について.

$\operatorname{Im}\partial_3 = 0$ であることは明らか. また $a_1 f_1 + a_2 f_2 \in \operatorname{Ker}\partial_2 \Leftrightarrow 0 = a_1(e_1+e_2+e_5) + a_2(e_2+e_3-e_5) = a_1 e_1 + (a_1+a_2)e_2 + a_2 e_3 + (a_1-a_2)e_5 \Leftrightarrow a_1 = a_2 = 0$ であるので $\operatorname{Ker}\partial_2 = 0$. よって

$$H_2(MB;\mathbb{Z}) = \operatorname{Ker}\partial_2 / \operatorname{Im}\partial_3 = 0/0 = 0.$$

$H_1(MB;\mathbb{Z})$ について.

$a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_5e_5 \in \operatorname{Ker}\partial_1 \Leftrightarrow 0 = a_1(v_2-v_1) + a_2(v_1-v_2) + a_3(v_2-v_1) = (-a_1+a_2-a_3)v_1 + (a_1-a_2+a_3)v_2$
$\Leftrightarrow a_1 - a_2 + a_3 = 0$ であるので,

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}\partial_1 &= \{a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_5e_5 \mid a_1 - a_2 + a_3 = 0\} \\ &= \{a_1(e_1+e_2) + a_3(e_2+e_3) + a_5e_5 \mid a_1, a_3, a_5 \in \mathbb{Z}\} \\ &= \mathbb{Z}(e_1+e_2) \oplus \mathbb{Z}(e_2+e_3) \oplus \mathbb{Z}e_5. \end{aligned}$$

また

$$\operatorname{Im}\partial_2 = \langle e_1+e_2-e_5, e_2+e_3-e_5\rangle_{\mathbb{Z}}$$

であるので,

$$\begin{aligned} H_1(MB;\mathbb{Z}) &= \operatorname{Ker}\partial_1 / \operatorname{Im}\partial_2 \\ &= \mathbb{Z}(e_1+e_2) \oplus \mathbb{Z}(e_2+e_3) \oplus \mathbb{Z}e_5 / \langle e_1+e_2-e_5, e_2+e_3-e_5\rangle_{\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

最後の同型は $\varphi : \operatorname{Ker}\partial_1 \to \mathbb{Z}, a_1(e_1+e_2) + a_3(e_2+e_3) + a_5e_5 \mapsto -a_1 + a_3 + a_5$ から出る.

$H_0(MB;\mathbb{Z})$ について

$\operatorname{Ker}\partial_0 = C_0(MB;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}v_1 \oplus \mathbb{Z}v_2$, $\operatorname{Im}\partial_1 = \mathbb{Z}(v_2 - v_1)$ であるので

$$H_0(MB;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}v_1 \oplus \mathbb{Z}v_2 / \mathbb{Z}(v_2 - v_1) \simeq \mathbb{Z}.$$

最後の同型は $\psi : a_1v_1 + a_2v_2 \mapsto a_1 + a_2$ から出る. $\square$