

問 1. i) $0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2$ が完全 $\Leftrightarrow f$ が単射.

ii) $M_2 \xrightarrow{g} M_3 \rightarrow 0$ が完全 $\Leftrightarrow g$ が全射.

iii) $0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \rightarrow 0$ が完全 $\Leftrightarrow f$ が単射, g が全射, かつ $\text{Im } f = \text{Ker } g$.

iv) 任意の R -準同型 $f: M \rightarrow N$ に対して, $0 \rightarrow \text{Ker } f \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\pi} N/\text{Im } f \rightarrow 0$ は完全.

解答. i) 今 $\text{Im}(0 \rightarrow M) = 0$ であるので, この系列が完全であることは $\text{Ker } f = 0$ と同値. これは f が単射であること ($\because$ Theorem 1.2).

ii) $\text{Ker}(M_3 \rightarrow 0) = M_3$ であるので, この系列が完全であることは $\text{Im } g = M_3$ と同値. これは g が全射であること.

iii) i) と ii) より明らか.

iv) i は包含写像であるので単射, π は自然な全射である. $\text{Im } i = \text{Ker } f$ であることは明らか. $\text{Im } f = \text{Ker } \pi$ であることも明らか. よって完全系列である.

□

問 2. 各行が完全である可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc} M_5 & \xrightarrow{f_5} & M_4 & \xrightarrow{f_4} & M_3 & \xrightarrow{f_3} & M_2 & \xrightarrow{f_2} & M_1 & (\text{完全}) \\ \varphi_5 \downarrow & & \varphi_4 \downarrow & & \varphi_3 \downarrow & & \varphi_2 \downarrow & & \varphi_1 \downarrow & \\ N_5 & \xrightarrow{g_5} & N_4 & \xrightarrow{g_4} & N_3 & \xrightarrow{g_3} & N_2 & \xrightarrow{g_2} & N_1 & (\text{完全}) \end{array}$$

において, φ_5 が全射, φ_4, φ_2 が単射ならば, φ_3 も単射であることを示せ.

解答. $z_3 \in M_3, \varphi_3(z_3) = 0$ とする. $z_3 = 0$ であることを示せばよい. $0 = g_3(0) = g_3(\varphi_3(z_3)) = \varphi_2(f_3(z_3))$ であるので $f_3(z_3) \in \text{Ker } \varphi_2$. φ_2 は単射であるので, $f_3(z_3) = 0$ である. よって $z_3 \in \text{Ker } f_3 = \text{Im } f_4$. したがって $\exists z_4 \in M_4$ が存在して $z_3 = f_4(z_4)$ とできる. $g_4(\varphi_4(z_4)) = \varphi_3(f_4(z_4)) = f_3(z_3) = 0$ であるので, $\varphi_4(z_4) \in \text{Ker } g_4 = \text{Im } g_5$. このことと φ_5 の全射性より $\exists z_5 \in M_5$ が存在して $\varphi_4(z_4) = g_5(\varphi_5(z_5))$ と出来ることがわかる. したがって $\varphi_4(z_4) = g_5(\varphi_5(z_5)) = \varphi_4(f_5(z_5))$ であるが, φ_4 が単射であるので $z_4 = f_5(z_5)$. よって $z_3 = f_4(z_4) = f_4(f_5(z_5)) = 0$.

□