

問3 解答

M の生成元を $m_1, m_2, \dots, m_n \in M$ とする. このとき M/N が $[m_1], [m_2], \dots, [m_n]$ で生成されることを示そう.
 $\forall w \in M/N$ とする. このとき $\exists m \in M$ があって $w = [m]$ とできる. M は $m_1, m_2, \dots, m_n$ で生成されるので,
 $\exists a_1, a_2, \dots, a_n \in R$ が存在して

$$m = a_1 m_1 + a_2 m_2 + \dots + a_n m_n$$

と出来る. したがって

$$\begin{aligned} w = [m] &= [a_1 m_1 + a_2 m_2 + \dots + a_n m_n] \\ &= a_1 [m_1] + a_2 [m_2] + \dots + a_n [m_n]. \end{aligned}$$

よって M/N の任意の元は, $[m_1], [m_2], \dots, [m_n]$ の R 上の一次結合として表される. すなわち M/N は $[m_1], [m_2], \dots, [m_n]$ で生成される.

問4 解答

i) $x^2 f(x) + x^2 g(x) = x^2 (f(x) + g(x))$ であるので, (x^2) は和について閉じている. R 倍は $a(x^2 f(x)) = x^2 (af(x))$, $R[x]$ 倍は $g(x)(x^2 f(x)) = x^2 (f(x)g(x))$ で定義される. これらは環 $R[x]$ の中での積と同じであるので, 加群としてのスカラー倍を定義していることが簡単にわかる.

ii) まず $x^2 = x^2 \cdot 1 \in (x^2)$ である. 次に (x^2) の任意の元は $f(x)x^2$ の形である. これは (x^2) が $R[x]$ -加群として x^2 で生成されていること.

iii) (x^2) の任意の元は $\sum_{i=2}^n a_i x^i$ という形で書ける. これは (x^2) が R -加群として $\{x^2, x^3, x^4, \dots, x^n, \dots\}$ で生成されていること. また, もし有限個の元 $m_1, \dots, m_n \in (x^2)$ で生成されているとすると, (x^2) の元は $m = a_1 m_1 + \dots + a_n m_n$ の形にかけられるが, このとき

$$\deg m \leq \max\{\deg m_1, \dots, \deg m_n\} =: d$$

となるので, (x^2) の任意の元は d 次以下になってしまう. これは $x^{d+2} = x^2 x^d \in (x^2)$ であることに反する.

iv) まず $d \geq 2$ に対して, $x^d = x^2 x^{d-2} \in (x^2)$ である. すなわち $d \geq 2$ に対して $[x^d] = [0] \in R[x]/(x^2)$ である. よって

$$[a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n] = a_0 + a_1 [x] + a_2 [x^2] + \dots + a_n [x^n] = a_0 + a_1 [x]$$

これは $R[x]/(x^2)$ が R -加群として $[1], [x]$ で生成されていることを示している.