

直和加群について

R -加群 M, N に対し, 直積集合 $M \times N$ に加法, スカラー倍を

$$\begin{aligned} \text{加法} \quad & (m, n) + (m', n') := (m + m', n + n') \\ \text{スカラー倍} \quad & a(m, n) := (am, an) \end{aligned}$$

と定義すると, $M \times N$ は R -加群になることを示せ.

$$(\text{加法可換律}) \quad (m, n) + (m', n') = (m + m', n + n') = (m' + m, n' + n) = (m', n') + (m, n).$$

$$(\text{加法結合律}) \quad \{(m_1, n_1) + (m_2, n_2)\} + (m_3, n_3) = (m_1 + m_2, n_1 + n_2) + (m_3, n_3) = ((m_1 + m_2) + m_3, (n_1 + n_2) + n_3) = (m_1 + (m_2 + m_3), n_1 + (n_2 + n_3)) = (m_1, n_1) + (m_2 + m_3, n_2 + n_3) = (m_1, n_1) + \{(m_2, n_2) + (m_3, n_3)\}.$$

$$(\text{加法単位元}) \quad M, N \text{ の零元をそれぞれ } 0_M, 0_N \text{ としたとき, } (0_M, 0_N) \text{ が } M \times N \text{ の零元である. 実際, } (m, n) + (0_M, 0_N) = (m + 0_M, n + 0_N) = (m, n), (0_M, 0_N) + (m, n) = (0_M + m, 0_N + n) = (m, n) \text{ である.}$$

$$(\text{加法逆元}) \quad (m, n) \text{ の逆元は } (-m, -n) \text{ である. 実際 } (m, n) + (-m, -n) = (m - m, n - n) = (0_M, 0_N), (-m, -n) + (m, n) = (-m + m, -n + n) = (0_M, 0_N).$$

$$(M2) \quad a\{(m_1, n_1) + (m_2, n_2)\} = a(m_1 + m_2, n_1 + n_2) = (a(m_1 + m_2), a(n_1 + n_2)) = (am_1 + am_2, an_1 + an_2) = (am_1, an_1) + (am_2, an_2) = a(m_1, n_1) + a(m_2, n_2).$$

$$(M3) \quad (a + b)(m, n) = ((a + b)m, (a + b)n) = (am + bm, an + bn) = (am, an) + (bm, bn) = a(m, n) + b(m, n).$$

$$(M4) \quad (ab)(m, n) = ((ab)m, (ab)n) = (a(bm), a(bn)) = a(bm, bn) = a(b(m, n)).$$

$$(M5) \quad 1(m, n) = (1m, 1n) = (m, n).$$

□

授業では, 2 個の R -加群の直和加群しか定義しなかった (ここから帰納的に, 有限個の R -加群の直和加群が定義出来る) が, 無限個の R -加群にも, 同じようなことが考えられる.

Definition. M_λ ($\lambda \in \Lambda$) を R -加群とする. 直積集合 $\prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda = \{(m_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \mid a_\lambda \in M_\lambda\}$ に, 加法, スカラー倍を

$$\begin{aligned} \text{加法} \quad & (m_\lambda) + (m'_\lambda) := (m_\lambda + m'_\lambda, n_\lambda + n'_\lambda) \\ \text{スカラー倍} \quad & a(m_\lambda) := (am_\lambda) \end{aligned}$$

で定義すると, $\prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ は R -加群となる, これを M_λ の直積加群 (direct product) という.

Definition. M_λ ($\lambda \in \Lambda$) を R -加群とする. 直積集合 $\prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ の部分集合

$$\{(m_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \mid \text{有限個の } \lambda \text{ を除いて } m_\lambda = 0\}$$

に, 加法, スカラー倍を

$$\begin{aligned} \text{加法} \quad & (m_\lambda) + (m'_\lambda) := (m_\lambda + m'_\lambda, n_\lambda + n'_\lambda) \\ \text{スカラー倍} \quad & a(m_\lambda) := (am_\lambda) \end{aligned}$$

で定義すると, これは R -加群となる, これを M_λ の直和加群 (direct product) といい $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ で表す.

Remark. Λ が有限集合であれば, 「有限個の λ を除いて $m_\lambda = 0$ 」は当たり前のことであるので, 直和加群と直積加群は全く同じである.

$(m_\lambda)_\lambda$ を $\sum_\lambda m_\lambda$ と書くことにすれば, 直積加群 $\prod_\lambda M_\lambda$ は無限和の空間, 直和加群 $\bigoplus_\lambda M_\lambda$ は有限和の空間と思える.