

§1. 環と加群

♠ 重要! ♥ 簡単! ◇ 難問!

問 1. R を環, M を R -加群, $M' \subset M$ を部分加群とする.

- i) $M/M' \simeq 0$ であるための必要十分条件は $M' = M$ であることを示せ.
- ii) $M/M' \simeq M$ であるための必要十分条件は $M' = 0$ であることを示せ.

問 2. R を環, M, N を R -加群, $f: M \rightarrow N$ を R -準同型とする.

- i) $M' \subset M$ を部分加群とする. $M/M' \rightarrow N, [m] \mapsto f(m)$ が well-defined であるための必要十分条件は $M' \subset \text{Ker } f$ であることを示せ.
- ii) $M' \subset M, N' \subset N$ をそれぞれの部分加群とする. $M/M' \rightarrow N/N', [m] \mapsto [f(m)]$ が well-defined であるための必要十分条件は $f(M') \subset N'$ であることを示せ.

問 3. R を環, M を有限生成 R -加群とする. このとき任意の部分加群 $M' \subset M$ に対して, 商加群 M/M' も R 上有限生成であることを示せ.

問 4. R を環とする. R 係数一変数多項式環 $R[x]$ において,

$$(x^2) := \{x^2 f(x) \mid f(x) \in R[x]\} \subset R[x]$$

を考える.

- i) (x^2) は R -加群であり, かつ $R[x]$ -加群であることを示せ.
- ii) (x^2) は $R[x]$ -加群としては有限生成であることを示せ. また $R[x]$ -加群としての生成系を一組与えよ.
- iii) (x^2) は R -加群としては有限生成でないことを示せ. また R -加群としての生成系を一組与えよ.
- iv) 商加群 $R[x]/(x^2)$ は R -加群としては有限生成であることを示せ. また R -加群としての生成系を一組与えよ.

問 5. R を環, M を R -加群, $m_1, m_2, \dots, m_s \in M$ とする. $\forall a_{i,j} \in R$ として

$$\begin{aligned} n_1 &:= m_1, \\ n_2 &:= m_2 + a_{2,1}m_1, \\ n_3 &:= m_3 + a_{3,2}m_2 + a_{3,1}m_1, \\ &\vdots \\ n_s &:= m_s + a_{s,s-1}m_{s-1} + \dots + a_{s,1}m_1 \end{aligned}$$

とおく. このとき, $\langle m_1, m_2, \dots, m_s \rangle_R = \langle n_1, n_2, \dots, n_s \rangle_R$ であることを示せ.

問 6. e_1, e_2, e_3 を自由基底とする自由加群 $F := \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2 \oplus \mathbb{Z}e_3 (\simeq \mathbb{Z}^{\oplus 3})$ を考える.

- i) 部分加群 $F_1 := \langle e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_3 - e_1 \rangle_{\mathbb{Z}}$ に対して $F/F_1 \simeq \mathbb{Z}$ であることを示せ.
- ii) 部分加群 $F_2 := \langle e_1 + e_2 + e_3 \rangle_{\mathbb{Z}}$ に対して $F/F_2 \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ であることを示せ.
- iii) 部分加群 $F_3 := \langle e_1 + e_2 + e_3, 2e_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$ に対して $F/F_3 \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ であることを示せ.